



Dear

Mr. M. Saadatmand Tarzjan, Mr. H. Abrishami Moghadam

Thank you for selecting CIS2004 for submission of your paper. We are pleased to inform you that your submitted paper with the title

"الگوریتمی برای آشکارسازی لبه های تصویر بروش آستانه گذاری بهینه"

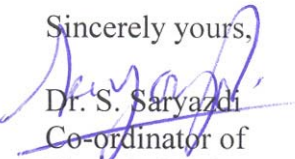
has been accepted for an oral presentation at the 6th Conference on Intelligent Systems (CIS 2004), which to be held in Kerman on 24th -25th Nov. 2004.

You should note that your attendance and presentation at the conference is important, otherwise based on the decision made by permanent committee of CIS, your paper will not be published in the proceeding.

Please visit www.cis2004.info for the latest updates.

Looking forward to meeting you in Kerman.

Sincerely yours,


Dr. S. Saryazdi
Co-ordinator of
The 6th Conference
on Intelligent Systems (CIS)

بررسی و اثبات همگرایی یک الگوریتم آستانه‌گذاری بهینه برای آشکارسازی لبه‌های تصویر

حمید ابریشمی مقدم
moghadam@eetd.kntu.ac.ir

مهدی سعادت‌مند طرزجان
811301003@ee.kntu.ac.ir

دانشکده برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده: آستانه‌گذاری تصویر گرادیان، یکی از پرکاربردترین روش‌های استخراج لبه‌های تصاویر است. در اینگونه روش‌ها پراهمیت‌ترین مرحله، انتخاب بهینه آستانه است. در این مقاله، الگوریتم تکراری Henstock بمنظور آستانه‌گذاری بهینه تصویر گرادیان، معرفی و همگرایی آن به اثبات رسیده است. در الگوریتم Henstock، هیستوگرام تصویر مجذور گرادیان، بوسیله مجموع دو تابع چگالی احتمال از نوع گاما مدل گردیده و پارامترهای آنها با استفاده از روش بیشترین امید، بصورت تکراری، تخمین زده می‌شود. در این مقاله، برای اثبات همگرایی الگوریتم مذکور اولاً ثابت گردیده که آستانه بهینه مطلوب، منطبق بر مینیمم عمومی الگوریتم است و ثانیاً نشان داده شده است که روش الگوریتم Henstock در تخمین پارامترهای مدل، منطبق بر روش بیشترین شیب می‌باشد. شبیه‌سازی‌ها بیانگر عملکرد مناسب و قابل اطمینان الگوریتم فوق در آستانه‌گذاری بر تصاویر گرادیان است.

کلمات کلیدی: آستانه‌گذاری بهینه تصویر گرادیان، آشکارسازی لبه، پردازش تصویر، روش بیشترین امید، برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی.

۱- مقدمه

لبه عبارت است از تغییرات تند روشنایی در ناحیه کوچکی از یک تصویر. تاکنون الگوریتم‌های زیادی برای تشخیص لبه ارائه شده است [۱]. دسته‌ای از روش‌های آشکارسازی لبه، بر یافتن ماکزیمم‌های محلی گرادیان تصویر استوار هستند. بدین معنی که ابتدا گرادیان تصویر توسط یک عملگر گرادیانی محاسبه می‌شود و سپس با قرار دادن یک مقدار آستانه سعی می‌شود نقاطی که ماکزیمم گرادیان را به خود اختصاص داده و متناظر با لبه‌های تصویر هستند استخراج شوند [۲]، [۳]. تعیین آستانه مناسب در تصاویر گرادیان که بتواند پیکسل‌های لبه و غیرلبه را از یکدیگر جدا نماید، امری بسیار دشوار است. زیرا در حالت کلی آستانه بهینه می‌تواند تابعی از کاربرد، سیستم تصویربرداری و ناظر باشد. انتخاب آستانه در هیستوگرام تصویر گرادیان مشابه با یک مسأله ناحیه‌بندی با استفاده از هیستوگرام سطوح خاکستری است. در این قبیل روش‌ها معمولاً آستانه را در کمینه‌ای بین دو برجستگی هیستوگرام قرار می‌دهند. مبنای انجام اینکار نیز توجه به شکل و گشتاور بخش‌های مختلف هیستوگرام یا برجستگی‌ها و فرورفتگی‌های (modality) آن است [۴]، [۵]. از آنجا که معمولاً هیستوگرام تصویر گرادیان دارای دو قله مجزا نیست، این شیوه نمی‌تواند در این تصاویر چندان مؤثر باشد. در برخی روش‌های متداول در آشکارسازی لبه، مقدار آستانه بر اساس بهینه‌سازی خصوصیتی چون پیوستگی لبه و خطای دسته‌بندی محاسبه می‌شود [۱]، [۶]، [۷]، اما اینگونه الگوریتم‌ها معمولاً قادر به تنظیم مناسب مقدار آستانه برای طیف وسیعی از تصاویر نیستند. روش‌هایی از قبیل p-tile [۵] که در همان ابتدای کار نسبتی ثابت بین

پیکسل‌های لبه و غیرلبه در نظر می‌گیرند نیز تخمین‌های غیردقیقی از مقدار آستانه ارائه می‌دهند، زیرا نسبت مذکور بشدت وابسته به تصویر و نویز موجود در آن است. این مقاله به معرفی روش آستانه‌گذاری بهینه Henstock می‌پردازد. در این روش، هیستوگرام تصویر مجذور گرادیان (gradient squared image) به صورت مجموعی از دو تابع چگالی احتمال از نوع گاما در نظر گرفته می‌شود. سپس به کمک روش تکراری بیشترین امید (Expectation Maximization - EM) و با استفاده از برآورنده بیشترین درست‌نمایی (Maximum Likelihood - ML) پارامترهای توزیع‌های فوق تخمین زده شده و آستانه بهینه محاسبه می‌شود.

در بخش بعدی مدل آماری هیستوگرام تصویر مجذور گرادیان معرفی می‌شود. بخش سوم به معرفی برآورنده بیشترین درست‌نمایی در تخمین پارامترهای تابع چگالی احتمال گاما می‌پردازد. بخش چهارم را به معرفی الگوریتم Henstock در تخمین پارامترهای مدل مذکور اختصاص داده‌ایم. در بخش پنجم شکل عمومی الگوریتم Henstock ارائه گردیده است. بخش‌های ششم و هفتم به ترتیب به بررسی نقطه ثابت الگوریتم و یکتایی آن می‌پردازند. در بخش هشتم همگرایی الگوریتم Henstock به اثبات رسیده است و بخش‌های نهم و دهم به ترتیب به بررسی نتایج شبیه‌سازی‌ها و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲- معرفی مدل آماری هیستوگرام مجذور گرادیان تصویر

در [۸] برای تخمین مقدار آستانه از مدلی آماری برای هیستوگرام استفاده شده است. این مدل دارای پنج پارامتر است و الگوریتم ارائه شده در مقاله مذکور از طریق تطبیق مدل با هیستوگرام، مقدار پارامترهای مدل را محاسبه می‌نماید. فرض کنیم توزیع آماری پیکسل‌های لبه و غیرلبه در گرادیان تصویر نرمال باشد. بنابراین توزیع هیستوگرام تصویر مجذور گرادیان از نوع کای اسکور غیر مرکزی (non-central chi-square distribution) است [۹]. بدلیل سادگی در محاسبات از توزیع گاما برای مدل نمودن مقادیر مجذور گرادیان استفاده شده است. اگر پارامترهای توزیع گاما بشکل بهینه‌ای انتخاب گردند، با توجه به اینکه توزیع کای اسکور حالت خاصی از توزیع گاما است [۹]، جایگزینی فوق می‌تواند صحیح باشد. مدل نهایی که باید بر هیستوگرام تصویر منطبق شود، عبارت است از جمع وزن‌دار دو تابع چگالی احتمال گاما که اولی توزیع پیکسل‌های لبه و دومی توزیع پیکسل‌های غیرلبه را نشان می‌دهند. این مدل را می‌توان طبق معادله (۱) تعریف نمود،

$$f(x) = p_0 \times f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1 - p_0) \times f(x|\alpha_1, \beta_1) \quad (1)$$

که در آن p_0 احتمال غیرلبه بودن یک پیکسل در تصویر، $f(x|\alpha_0, \beta_0)$ و $f(x|\alpha_1, \beta_1)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال پیکسل‌های غیرلبه و لبه و $f(x)$ مدل پیشنهادی برای هیستوگرام مجذور گرادیان هستند. با تخمین دقیق پنج پارامتر مدل با استفاده از برآورنده بیشترین امید، آستانه مطلوب بین پیکسل‌های لبه و غیرلبه نیز تعیین می‌شود.

۳- استفاده از الگوریتم بیشترین درست‌نمایی در محاسبه پارامترهای توزیع گاما

بیشترین درست‌نمایی یکی از پرکاربردترین روش‌ها در تخمین پارامترهای مجهول یک توزیع آماری با استفاده از نمونه‌های مشاهده شده آن است [۶]. با توجه به کاربرد توزیع گاما در مدل آماری ارائه شده، می‌خواهیم با استفاده از ML برآوردی از پارامترهای توزیع گاما بدست آوریم. فرض کنید که x_1, x_2, \dots, x_n دارای چگالی احتمال توأم گاما با پارامترهای یکسان و مجهول α و β مطابق با معادله (۲) باشند (از اینجا به بعد تا پایان مقاله توابع چگالی احتمال از نوع گاما را به صورت $f(x|\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم).

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} \times e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \times \Gamma(\alpha)} \quad (2)$$

بنابراین تابع درستنامایی آنها عبارت است از [۱۰]،

$$f(x|\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\alpha, \beta) = \frac{\left[\prod_{j=1}^N x_j^{\alpha-1} \right] \times e^{-\sum_{k=1}^N x_k/\beta}}{\beta^{N\alpha} \times \Gamma(\alpha)^N} \quad (۳)$$

برای یافتن α و β که تابع درستنامایی را ماکزیمم می‌نماید، مطابق معادله (۴) از لگاریتم تابع (۳) بر حسب α و β مشتق گرفته، حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \rightarrow \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - N \ln(\beta) - N \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln[\Gamma(\alpha)] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \rightarrow \beta = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N\alpha} \end{cases} \quad (۴)$$

به دلیل حضور تابع $\Gamma(\alpha)$ در معادله اول دستگاه معادلات (۴)، این معادلات حل تحلیلی نداشته و پاسخ آن از روش‌های عددی محاسبه گردد. جهت سهولت، برآورده بیشترین درستنامایی در تخمین پارامترهای تابع چگالی احتمال از نوع گاما را به شکل ذیل نشان می‌دهیم:

$$[\alpha, \beta] = ML(\{x_1, x_1, \dots, x_N\}) \quad (۵)$$

که $\{x_1, x_1, \dots, x_N\}$ مجموعه نمونه‌های تصادفی است که برآورد بر اساس آنها انجام می‌شود و $[\alpha, \beta]$ پارامترهای برآورد شده توسط ML است. بدیهی است که $[\alpha, \beta]$ از حل دستگاه معادلات (۴) بدست می‌آیند.

۴- محاسبه پارامترهای مدل آماری

روشی که در [۸] برای تخمین پارامترهای مدل در معادله (۱) ارائه شده شامل دو بخش مجزا است. در مرحله اول ابتدا چهار پارامتر توزیع‌های گاما محاسبه و سپس در مرحله دوم مقدار پارامتر p_0 بهنگام می‌شود. برای محاسبه پارامترهای توزیع‌ها از روش بیشترین درستنامایی استفاده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا با استفاده از هیستوگرام و بر اساس مقدار موجود p_0 ، تخمینی از توزیع پیکسل‌های لبه و غیرلبه بدست می‌آید. سپس از توابع تخمین زده شده، نمونه‌برداری شده و سپس الگوریتم بیشترین درستنامایی پارامترهای توابع چگالی احتمال گاما را با استفاده از این نمونه‌ها محاسبه می‌کند. در مرحله بعد، با محاسبه یک امید ریاضی مقدار جدیدی برای p_0 بدست می‌آید. این فرآیند تا آنجا ادامه می‌یابد که یا الگوریتم همگرا گردد و یا دیگر بهبودی در مدل و پارامترهای حاصل نگردد. در جدول (۱) این الگوریتم به تفصیل بیان گردیده است. در ادامه مقاله، الگوریتم فوق را با نام الگوریتم Henstock می‌شناسیم.

۵- شکل عمومی الگوریتم Henstock

فرض کنید H ، $f_0(x|\alpha_0^k, \beta_0^k)$ ، $f_1(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)$ و p به ترتیب بیانگر هیستوگرام مجذور گرادیان، تابع چگالی احتمال پیکسل‌های غیرلبه، تابع چگالی احتمال پیکسل‌های لبه و احتمال غیرلبه بودن یک پیکسل در تصویر باشد. در این صورت، می‌توان فرم عمومی الگوریتم Henstock را مطابق با معادله (۱۱) نوشت که در آن $\{(\alpha_0^k, \beta_0^k), (\alpha_1^k, \beta_1^k), p^k\}$ مجموعه پارامترهای ورودی، $\{(\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1}), (\alpha_1^{k+1}, \beta_1^{k+1}), p^{k+1}\}$ مجموعه پارامترهای خروجی و D_H بیانگر دامنه تعریف $H(x)$ است. در معادله (۱۱)، تابع $SG(f(x))$ (همانطور که در معادله ۱۲ تعریف گردیده است)، ابتدا $f(x)$ را نرمالیزه کرده و سپس بینهایت نمونه تصادفی تولید می‌کند به طوری که اولاً تمام دامنه تعریف $f(x)$ را پوشانند و ثانیاً تابع چگالی احتمال گسسته آنها منطبق بر $f(x)$ نرمالیزه باشد.

¹ Sample Generator (SG)

جدول (۱): الگوریتم Henstock در تخمین پارامترهای مدل.

<p>(۱) به p_0^0 مقدار $0/88$ نسبت داده شود. همچنین $k \rightarrow 0$.</p>
<p>(۲) توابع چگالی احتمال پیکسل‌های لبه و غیرلبه با استفاده از هیستوگرام و مقدار p_0^k تخمین زده شود. آ. برای انجام اینکار در آغاز کار (مرحله صفرم)، هیستوگرام براساس مقدار p_0^0 و بروش p-tile به دو بخش مجزا تقسیم می‌گردد. بخش‌های سمت چپ $f(x \alpha_0^k, \beta_0^k)$ و راست $f(x \alpha_1^k, \beta_1^k)$ به ترتیب تخمینی از پیکسل‌های غیرلبه و لبه می‌باشد. ب. در مرحله $k > 0$، توابع چگالی احتمال طبق معادلات ذیل تخمین زده می‌شوند.</p>
$r_0(x) = \frac{p_0^k \times f(x \alpha_0^k, \beta_0^k)}{p_0^k \times f(x \alpha_0^k, \beta_0^k) + (1 - p_0^k) \times f(x \alpha_1^k, \beta_1^k)} \quad (۶)$
$d_0(x) = H(x) \times r(x) \quad (۷)$
$d_1(x) = H(x) \times [1 - r(x)] \quad (۸)$
<p>که $f(x \alpha_0^k, \beta_0^k)$ و $f(x \alpha_1^k, \beta_1^k)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال پیکسل‌های لبه و غیرلبه در مرحله k، $H(x)$ هیستوگرام مجذور گرادیان تصویر و $d_0(x)$ و $d_1(x)$ به ترتیب تخمینی از توابع چگالی احتمال پیکسل‌های لبه و غیرلبه در مرحله $k+1$ هستند.</p>
<p>(۳) به کمک تکنیک بیشترین درست‌نمایی و با استفاده از توزیع‌های تخمین زده شده $d_0(x)$ و $d_1(x)$، مقادیر α^{k+1} و β^{k+1} برای هر دو توزیع گاما تخمین زده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا از $d_0(x)$ و $d_1(x)$ نمونه برداری می‌شود و سپس با استفاده از ML و نمونه‌های بدست آمده، پارامترهای α^{k+1} و β^{k+1} برای هر دو توزیع گاما، تخمین زده می‌شوند.</p>
<p>(۴) مقدار پارامتر p_0^{k+1} طبق معادله ذیل محاسبه می‌گردد.</p>
$p_0^{k+1} = \sum_{x=1}^n H(x) \frac{p_0^k \times f(x \alpha_0^k, \beta_0^k)}{p_0^k \times f(x \alpha_0^k, \beta_0^k) + (1 - p_0^k) \times f(x \alpha_1^k, \beta_1^k)} \quad (۹)$
<p>که n اندازه بردار هیستوگرام است.</p>
<p>(۵) چنانچه تغییرات پارامترهای مدل ناچیز است و یا دیگر پیشرفتی در فرآیند تخمین مشاهده نمی‌شود به مرحله ۶ و در غیر اینصورت $k \rightarrow k+1$ و به مرحله ۲ رجوع شود.</p>
<p>(۶) مقدار آستانه با استفاده از معادله (۱۲) محاسبه می‌شود.</p>
$tr = \min\{1 \leq x \leq n \mid \text{such that } (1 - p_0) \times f(x \alpha_1, \beta_1) > p_0 \times f(x \alpha_0, \beta_0)\} \quad (۱۰)$

بنابراین، تابع $ML(SG(f(x)))$ پارامترهای تابع چگالی احتمال گاما را چنان برآورد می‌کند که تابع حاصل تا حد امکان مشابه $f(x)$ باشد، زیرا نمونه‌های تصادفی تولید شده توسط تابع $SG(f(x))$ به عنوان ورودی به برآورنده بیشترین درست‌نمایی (ML) داده می‌شود.

$$\left\{ \begin{aligned} [\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1}] &= ML \left(SG \left(H(x) \frac{p_0^k \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k)}{p_0^k \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k) + (1 - p_0^k) \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)} \right) \right) \\ [\alpha_1^{k+1}, \beta_1^{k+1}] &= ML \left(SG \left(H(x) \frac{(1 - p_0^k) \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)}{p_0^k \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k) + (1 - p_0^k) \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (۱۱)$$

$$p_0^{k+1} = \int_{D_H} H(x) \frac{p_0^k \cdot f(x|\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1})}{p_0^k \cdot f(x|\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1}) + (1 - p_0^{k+1}) \times f(x|\alpha_1^{k+1}, \beta_1^{k+1})} dx$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N, \dots\} = SG \left(\frac{f(x)}{\int_{D_f} f(x) dx} \right) = SG(f(x)) \quad (۱۲)$$

با توجه به اینکه نمونه‌های تصادفی تولید شده توسط $SG(f(x))$ تمام دامنه تعریف $f(x)$ را می‌پوشانند و تابع چگالی احتمال گسسته آنها $f(x) / \int_{D_f} f(x) dx$ می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که x_i به تعداد $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} N \frac{f(x_i)}{\int_{D_f} f(x) dx} \Delta x$ مرتبه

در بین نمونه‌ها تکرار شده است. بنابراین، با توجه به معادلات (۴) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت،

$$[\alpha, \beta] = ML(SG(f(x))) : \begin{cases} \int_{D_f} f(x) \left[\ln(x_i) - N \ln(\beta) - N \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln[\Gamma(\alpha)] \right] dx = 0 \\ \int_{D_f} f(x) [x - \alpha\beta] dx = 0 \end{cases} \quad (13)$$

معادله (۱۳)، در حقیقت، شکل پیوسته معادله (۴) است. با توجه به اینکه در این حالت تعداد نمونه‌ها بینهایت است، پس چنانچه $f(x)$ مطابق رابطه (۲) تعریف شود، داریم [۱۱]،

$$[\alpha, \beta] = ML(SG(f(x|\alpha, \beta))) \quad (14)$$

از مقایسه مجموعه معادلات (۱۱) با معادلات (۶) تا (۹) بروشنی می‌توان دریافت که مجموعه معادلات مذکور درحقیقت الگوریتم Henstock را در حالت پیوسته بیان می‌کنند.

۶- تعیین نقطه ثابت الگوریتم

فرض کنید که هیستوگرام مجذور گرادیان مطابق معادله (۱۵) با مدل پیشنهادی که در معادله (۱) تعریف گردیده برابر باشد.

$$H = f(x) = q \times f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1-q) \times f(x|\alpha_1, \beta_1) \quad (15)$$

که پارامتر q نیز بیانگر نسبت پیکسل‌های غیرلبه تصویر به کل پیکسل‌ها است. بدیهی است که با تعریف بالا $\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\}$ همان نقطه مطلوبی است که می‌خواهیم الگوریتم به آن همگرا گردد. بنابراین الگوریتم در این نقطه باید پایدار باشد. به عبارت دیگر به ازای ورودی فوق باید خروجی مجموعه معادلات (۱۱) برابر با ورودی مذکور گردد. برای بررسی صحت این مطلب، $\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\}$ را در مجموعه معادلات (۱۱) جایگذاری می‌کنیم، داریم،

$$\begin{cases} [\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1}] = ML(SG(q \times f(x|\alpha_0, \beta_0))) = [\alpha_0, \beta_0] \\ [\alpha_1^{k+1}, \beta_1^{k+1}] = ML(SG((1-q) \times f(x|\alpha_1, \beta_1))) = [\alpha_1, \beta_1] \\ p_0^{k+1} = q \times \int f(x|\alpha_0, \beta_0) \times dx = q \end{cases} \quad (16)$$

همانطور که در دستگاه معادلات فوق مشاهده می‌کنید، خروجی‌ها با ورودی‌ها برابر هستند. پس $\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\}$ یک نقطه ثابت مجموعه معادلات (۶) است [۱۲].

۷- اثبات یکتا بودن نقطه ثابت

قبلا نشان داده شد که اگر $H = q \times f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1-q) \times f(x|\alpha_1, \beta_1)$ برقرار باشد آنگاه $\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\}$ یک نقطه ثابت مجموعه معادلات (۶) و به عبارت دیگر همان نقطه هدف الگوریتم است. اکنون ثابت می‌کنیم که این نقطه ثابت یکتاست. فرض کنید $\{(\eta_0, \gamma_0), (\eta_1, \gamma_1), r\}$ نقطه ثابت دیگر این دستگاه معادلات باشد. بنابراین داریم،

$$\begin{cases} [\eta_0, \gamma_0] = ML \left(SG \left(H(x) \frac{f(x|\eta_0, \gamma_0)}{r \times f(x|\eta_0, \gamma_0) + (1-r) \times f(x|\eta_1, \gamma_1)} \right) \right) \\ [\eta_1, \gamma_1] = ML(SG(f(x|\eta_1, \gamma_1))) \end{cases} \Rightarrow H(x) = r \times f(x|\eta_0, \gamma_0) + (1-r) \times f(x|\eta_1, \gamma_1) \quad (17)$$

اکنون با استفاده گشتاورهای $H(x)$ ثابت می‌کنیم که این دو نقطه ثابت بریکدیگر منطبق هستند. گشتاور مرتبه n یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال گاما، $f(x|\alpha, \beta)$ ، مطابق معادله (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$E[X^n] = \Phi^{(n)}(0) = \beta^n \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j) \quad (۱۸)$$

معادلات (۱۵)، (۱۷) و (۱۸) معادله (۱۹) را نتیجه می‌دهند.

$$q\beta_0^n \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_0 + j) + (1-q)\beta_1^n \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_1 + j) = r\gamma_0^n \prod_{j=0}^{n-1} (\eta_0 + j) + (1-r)\gamma_1^n \prod_{j=0}^{n-1} (\eta_1 + j) \quad (۱۹)$$

معادله (۱۹) به ازای تمام n های طبیعی، $\{n|n \in N\}$ ، برقرار است لذا،

$$P = [P_1, P_2, P_3, P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \beta_0 \alpha_0 & \beta_1 \alpha_1 & -\gamma_0 \eta_0 & -\gamma_1 \eta_1 \\ \beta_0 \prod_{j=0}^1 (\alpha_0 + j) & \beta_1 \prod_{j=0}^1 (\alpha_1 + j) & -\gamma_0 \prod_{j=0}^1 (\eta_0 + j) & -\gamma_1 \prod_{j=0}^1 (\eta_1 + j) \\ \beta_0^2 \prod_{j=0}^2 (\alpha_0 + j) & \beta_1^2 \prod_{j=0}^2 (\alpha_1 + j) & -\gamma_0^2 \prod_{j=0}^2 (\eta_0 + j) & -\gamma_1^2 \prod_{j=0}^2 (\eta_1 + j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_0^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_0 + j) & \beta_1^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_1 + j) & -\gamma_0^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} (\eta_0 + j) & -\gamma_1^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} (\eta_1 + j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

$$P[q \ 1-q \ r \ 1-r]^T = 0_{1 \times 4}^T \quad (۲۱)$$

دستگاه معادلات (۲۱) تنها زمانی پاسخ غیر صفر دارد که P از مرتبه کامل نباشد. به عبارت دیگر باید بتوان حداقل یکی از ستونهای P را بصورت یک ترکیب خطی از ستونهای دیگر آن نوشت. هر عنصر ماتریس P ، از ضرب عنصر متناظرش در سطر قبل، در یک ضریب بدست می‌آید که ضریب مذکور با افزایش تعداد سطرها به صورت تصاعدی (تصاد حسابی) افزایش می‌یابد. بعلاوه عناصر سطر اول ثابت و یکتا هستند، بنابراین برای اینکه مرتبه ماتریس P به ازای تمام مقادیر q و r کامل نباشد باید حداقل یک ستون P ضریبی از ستونی دیگر باشد. لذا با توجه به اینکه P دارای چهار ستون است، در مجموع ۶ حالت متفاوت ممکن است رخ دهد. در ادامه سه حالت مربوط به ستون P_1 بررسی می‌شود. سه حالت باقیمانده نیز بروش مشابه قابل بررسی است.

حالت اول

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_0, \alpha_1 = \alpha_0 \quad (۲۲)$$

از معادله‌های (۲۲)، (۱۵) و (۱۷) می‌توان نتیجه گرفت،

$$H = f(x|\alpha_0, \beta_0) = f(x|\alpha_1, \beta_1) = r \cdot f(x|\eta_0, \gamma_0) + (1-r) \cdot f(x|\eta_1, \gamma_1) \quad (۲۳)$$

معادله (۲۳) با توجه به لمی که در ضمیمه الف اثبات گردیده است، نتیجه می‌دهد،

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_0 = \gamma_1 = \gamma_0 \\ \alpha_1 = \alpha_0 = \eta_1 = \eta_0 \\ 0 < r, q < 1 \end{cases} \quad (۲۴)$$

از آنجا که H مجموعی وزن دار از دو تابع چگالی احتمال گاما است، لذا معادله (۲۴) معتبر نبوده و در نتیجه $P_1 \neq P_2$.

حالت دوم

$$P_1 = -P_3 \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \gamma_0 \\ \alpha_0 = \eta_0 \end{cases} \quad (۲۵)$$

$$H = q \cdot f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1-q) \cdot f(x|\alpha_1, \beta_1) = r \cdot f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1-r) \cdot f(x|\eta_1, \gamma_1) \quad (26)$$

مشابه حالت اول اگر $q \neq r$ آنگاه مجدداً به مجموعه معادلات (24) می‌رسیم که غیرقابل قبول است. اگر $q = r$ آنگاه،

$$\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\} = \{(\eta_0, \gamma_0), (\eta_1, \gamma_1), r\} \quad (27)$$

حالت سوم

$$P_1 = -P_4 \Rightarrow \beta_0 = \gamma_1, \alpha_0 = \eta_1 \quad (28)$$

$$H = q \cdot f(x|\alpha_0, \beta_0) + (1-q) \cdot f(x|\alpha_1, \beta_1) = r \cdot f(x|\eta_0, \gamma_0) + (1-r) \cdot f(x|\alpha_0, \beta_0) \quad (29)$$

مشابه حالت دوم، اگر $q \neq 1-r$ آنگاه دوباره به مجموعه معادلات (24) می‌رسیم که قابل قبول نیست. اگر $q = 1-r$ داریم،

$$\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\} = \{(\eta_1, \gamma_1), (\eta_0, \gamma_0), 1-r\} \Rightarrow \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), q\} = \{(\eta_0, \gamma_0), (\eta_1, \gamma_1), r\} \quad (30)$$

از معادلات (27) و (30) می‌توان نتیجه گرفت که هر دو نقطه ثابت بر هم منطبق هستند و مجموعه معادلات (11) تنها یک نقطه ثابت دارد. همچنین ثابت گردید که اگر هیستوگرام به صورت مجموع دو توزیع گاما باشد، نقطه ثابت الگوریتم Henstock دقیقاً منطبق بر همان دو توزیع است. به عبارت دیگر الگوریتم Henstock تنها در یک نقطه پایدار است که آن نقطه نیز منطبق بر پاسخ مطلوب الگوریتم می‌باشد.

۸- اثبات همگرایی الگوریتم Henstock

برای اثبات همگرایی الگوریتم Henstock از EM استفاده شده است. در مواردی که مجموعه داده‌ها ناقص است، بیشترین امید الگوریتمی ایده‌آل برای برآورد پارامترها بشمار می‌رود [۱۳]. نتایج تئوری و تجربیات عملی ثابت می‌کند که سرعت همگرایی EM از الگوریتم‌های جستجوی دوبعدی نیوتن، کمتر است. اما، بزرگترین مزیت آن، همگرایی نرم و پایداری در برابر نویز و اعوجاج است. بعلاوه، از نظر محاسباتی، EM به روش‌های نیوتنی که نیازمند محاسبه ماتریس Hessian هستند، ترجیح داده می‌شود. الگوریتم Henstock، از یک مدل ترکیبی با دو تابع چگالی احتمال از نوع گاما برای مدل نمودن هیستوگرام مجذور گرادیان تصویر، $H(x)$ ، استفاده می‌کند.

$$H(x) = \sum_{j=0}^1 p(x|j)P_j = 1 \quad (31)$$

در این حالت مجموعه کامل داده‌ها شامل رویدادهای توأم (x_k, j_k) ، $k=1,2,\dots,N$ است. مقدار j_k ، یا ۰ یا ۱ است و تابع چگالی احتمالی که x_k براساس آن تولید شده است را مشخص می‌کند. با بکارگیری قانون بیز خواهیم داشت،

$$f(x_k, j_k; \theta) = p(x_k|j_k; \theta)P_{j_k} \quad (32)$$

در معادله بالا، θ برداری است که پارامترهای مجهول را در بر دارد. با فرض عدم وابستگی نمونه‌ها به یکدیگر تابع لگاریتم درست‌نمایی عبارت است از،

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^N \ln(p(x_k|j_k; \theta)P_{j_k}) \quad (33)$$

فرض کنید $P = [P_1, P_2]^T$. در اینجا بردار پارامترهای مجهول $\Theta = [\theta^T, P^T]^T$ است. اکنون الگوریتم EM را برای توابع چگالی احتمال گاما بسط می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$p(x_k|j; \theta) = f(x_k|\alpha_j, \beta_j) = \frac{x_k^{\alpha_j-1} e^{-x_k/\beta_j}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}, \quad j=0,1 \quad (34)$$

می‌دانیم که علاوه بر مقادیر احتمالاتی P_j ، پارامترهای α_j و β_j در هر یک از توابع چگالی احتمال گاما نیز مجهول هستند. بنابراین داریم،

مرحله محاسبه امید (E-step):

$$Q(\Theta; \Theta(x_k)) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^1 p(j|x_k; \Theta(x_k)) \left[(\alpha_j - 1) \ln(x_k) - \frac{x_k}{\beta_j} - \alpha_j \ln(\beta_j) - \ln(\Gamma(\alpha_j)) + \ln(P_j) \right] \quad (35)$$

که $Q(\Theta; \Theta(x_k))$ امید پارامترهای مشاهده نشده به ازای داده‌های موجود است.

مرحله بیشینه‌سازی (M-step):

اکنون معادله (35) را نسبت به α_j ، β_j و P_j بیشینه می‌کنیم.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) \left[\ln(x_k) - \ln(\beta_j) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \ln(\Gamma(\alpha_j)) \right] = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) [x_k - \alpha_j \beta_j] = 0 \quad (37)$$

برای مشتق‌گیری از معادله (35) بر حسب P_j ، باید توجه که $P_0 + P_1 = 1$ داشت. بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ برای محاسبه مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left[Q(\Theta; \Theta(x_k)) - \gamma \left(\sum_{j=0}^1 P_j - 1 \right) \right] = \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) \frac{1}{P_j} - \gamma = 0 \Rightarrow P_j = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) \quad (38)$$

با جایگذاری (38) در (31) داریم،

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) = 1 \Rightarrow \gamma = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^1 p(j|x_k; \Theta(x_k)) = \sum_{k=1}^N 1 = N \quad (39)$$

از (38) و (39) نتیجه می‌شود،

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(j|x_k; \Theta(x_k)) \quad (40)$$

x_k ها نمونه‌های هیستوگرام، $H(x)$ هستند؛ بطوری‌که تمام دامنه هیستوگرام را می‌پوشانند. بنابراین همانند آنچه در بخش 5 ذکر گردید، می‌توان نتیجه گرفت که $x_i \in D_H$ در میان نمونه‌ها به تعداد $\lim_{N \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} N \cdot H(x_i) \Delta x$ مرتبه تکرار شده است. بنابراین معادله (40) نتیجه می‌دهد،

$$P_j = \int_{D_H} H(x) p(j|x; \Theta(x)) dx \quad (41)$$

بروش مشابه از معادلات (36) و (37) می‌توان به ترتیب معادلات (42) و (43) را نتیجه گرفت،

$$\int_{D_H} H(x) p(j|x; \Theta(x)) \left[\ln(x) - \ln(\beta_j) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \ln(\Gamma(\alpha_j)) \right] dx = 0 \quad (42)$$

$$\int_{D_H} H(x) p(j|x; \Theta(x)) [x - \alpha_j \beta_j] dx = 0 \quad (43)$$

بنا بر قضیه بیز داریم،

$$p(j|x; \Theta(x)) = \frac{p(x|j; \theta(x)) P_j}{\sum_{j=0}^1 p(x|j; \theta(x)) P_j} \quad (44)$$

که با توجه به معادلات (13) و (14)، از جایگذاری (44) در (41) تا (43) نتیجه می‌شود،

$$\left\{ \begin{aligned} [\alpha_0^{k+1}, \beta_0^{k+1}] &= ML \left(SG \left(H(x) \frac{P_0 \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k)}{P_0 \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k) + P_1 \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)} \right) \right) \\ [\alpha_1^{k+1}, \beta_1^{k+1}] &= ML \left(SG \left(H(x) \frac{P_1 \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)}{P_0 \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k) + P_1 \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)} \right) \right) \\ P_0^{k+1} &= \int_{S_H} H(x) \frac{P_0 \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k)}{P_0 \cdot f(x|\alpha_0^k, \beta_0^k) + P_1 \cdot f(x|\alpha_1^k, \beta_1^k)} dx \end{aligned} \right. \quad (45)$$

می‌دانیم $P_0 + P_1 = 1$. با جایگذاری $P_1 = 1 - P_0$ در مجموعه معادلات (45)، به مجموعه معادلات (11) می‌رسیم که همان الگوریتم Henstock است. بنابراین این الگوریتم منطبق بر روش بیشترین امید بوده و در نتیجه پایدار و همگراست. الگوریتم Henstock در طول فرآیند تکرار به سمت یک ماکزیمم محلی یا ماکزیمم عمومی امید تابع لگاریتم درست‌نمایی همگرا می‌شود. به طوری که در نقطه همگرایی، الگوریتم پایدار است. اما در بخش‌های 6 و 7 نشان دادیم که تنها نقطه ثابت الگوریتم منطبق بر پاسخ مطلوب الگوریتم است. بنابراین این نقطه، ماکزیمم عمومی تابع لگاریتم درست‌نمایی است و الگوریتم بناچار به آن همگرا خواهد شد.

9- شبیه‌سازی‌ها

ما الگوریتم Henstock را شبیه‌سازی نمودیم. نتایج برای 11 تصویر متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. برای تولید تصاویر گرادیانی از فیلتر بازگشتی Deriche استفاده گردید. دلیل این انتخاب، بهینه بودن این فیلتر در آشکارسازی لبه بوده است [14]. در شکل‌های 1 و 2 یک تصویر نمونه و لبه‌های آشکار شده توسط الگوریتم Henstock نشان داده شده است. همچنین در شکل‌های 3 و 4 منحنی‌های تغییرات مقدار پارامترهای مدل و خطای آن در طول فرآیند تطبیق نشان داده شده است. در شکل 5 نیز هیستوگرام مجذور تصویر گرادیانی و مدل نظیر آن نشان داده شده است. همانطور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید، الگوریتم توانسته است طی 21 مرحله به مقدار نهایی‌اش همگرا گردد. در این حالت متوسط خطای مدل بدست آمده نسبت به هیستوگرام 0.15٪ و نسبت پیکسل‌های غیرلبه در تصویر، p ، 62٪ است. در حین شبیه‌سازی‌ها به نکته مهمی پی بردیم. برای تصاویری که هیستوگرام مجذور تصویر گرادیانی آنها خیلی سریع صفر می‌شود، اجرای الگوریتم با خطا مواجه می‌گردد. دلیل این امر در این است که الگوریتم پس از چند مرحله تکرار، مقدار پارامتر p را چنان تنظیم می‌کند که تقریباً تنها اولین ستون هیستوگرام در تابع جرم احتمال پیکسل‌های غیرلبه، $f(x|\alpha_0, \beta_0)$ ، قرار می‌گیرد در این حالت، الگوریتم می‌خواهد مقدار دو پارامتر (α_0, β_0) را تنها براساس یک داده موجود در $f(x|\alpha_0, \beta_0)$ بدست آورد که امری غیرممکن است. در حقیقت در چنین حالتی مقدار آستانه در محلی بین دو ستون اول هیستوگرام قرار دارد. برای رفع این اشکال، الگوریتم را متوقف و آستانه را در محل بین دو ستون هیستوگرام قرار داده‌ایم. در شکل 6 حاصل اعمال الگوریتم بر 10 تصویر استاندارد نشان داده شده است. همانطور که می‌بینید، علیرغم تنوع فراوان تصاویر، الگوریتم بخوبی توانسته است آستانه را محاسبه نماید.

10- نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتمی تکراری برای انتخاب آستانه معرفی و همگرایی آن به اثبات رسیده است. این الگوریتم هیستوگرام مجذور گرادیان تصویر را به صورت جمع دو تابع چگالی احتمال گاما که بیانگر توزیع پیکسل‌های لبه و غیرلبه در تصویر هستند مدل می‌نماید. برای تخمین پارامترهای مدل از روش بیشترین امید و برآوردکننده بیشترین درست‌نمایی استفاده گردیده است. مزیت این روش نسبت به دیگر الگوریتم‌های تکراری تخمین پارامتر، حجم کم محاسبات و همگرایی نرم و پایداری در برابر نویز و اعوجاجات است، هرچند که ممکن است سرعت همگرایی آن در

مقایسه با الگوریتم‌های نیوتنی کمتر باشد. شبیه‌سازی‌ها نیز نشان داد که الگوریتم قادر است بخوبی در طیف وسیعی از تصاویر آستانه مناسب را استخراج نماید.

مراجع

- [1] O. Faugeras, *Three-dimensional computer vision*. London: MIT Press, 3rd Printing, 1999
- [2] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing*. Prentice-Hall, 2nd ed., 2003.
- [3] D. H. Ballard and C. M. Brown, *Computer Vision*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1982.
- [4] J. N. Kapur, P. K. Sahoo, and A. K. C. Wong, "A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram," *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 29:273-285, 1985.
- [5] P. K. Sahoo, S. Soltani, and A. K. C. Wong, "A survey on thresholding techniques," *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 41:233-260, 1988.
- [6] I. E. Ahdou and W. K. Pratt, "Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors," *Proc. IEEE*, 67(5):753-763, May 1979.
- [7] L. Kitchen and A. Rosenfeld, "Edge evaluation using local edge coherence," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, SMC-11(9):597-605, 1981.
- [8] P. V. Henstock and D. M. Chelberg, "Automatic gradient threshold determination for edge detection," *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(5):784-787, 1996.
- [9] A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill, third edition, 1974.
- [10] S. M. Ross, *Introduction to probability and statistics*. Translated by M. Asadi and A. Bozorgnia, Ferdowsi University Press, 1996.
- [11] S. M. Hashemiparast, *Statistics in engineering and science*. Khajeh-Nasir Industrial University Press, 5th edition, 1996.
- [12] B. Mehri, *Computational Mathematics*. Jahad-e-Daneshgahi Amir-Kabir University Press, 1999.
- [13] S. Theodoridis and K. Koutroumbas, *Pattern recognition*. San Diego: Academic Press, 1999.
- [14] R. Deriche, "Using Canny's criteria to drive a recursively implemented optimal edge," *Int. Journal of Computer Vision*, pp. 167-187, 1987.

ضمیمه ۱

لم. اگر $f(x|\alpha_0, \beta_0)$ ، $f(x|\alpha_1, \beta_1)$ و $f(x|\alpha_2, \beta_2)$ سه تابع چگالی احتمال دلخواه از نوع گاما باشند. ثابت کنید تنها در صورتی می‌توان یکی را بصورت ترکیب خطی دو تابع دیگر نوشت که هر سه تابع مشابه باشند. در این حالت مجموع ضرایب یک است.

$$\begin{cases} c_1, c_2 \neq 0 \\ f(x|\alpha_0, \beta_0) = \sum_{i=1}^2 c_i f(x|\alpha_i, \beta_i) \Leftrightarrow \begin{cases} [\alpha_0, \beta_0] = [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] \\ \sum_{i=1}^2 c_i = 1 \end{cases} \end{cases}$$

اثبات

$$f(x|\alpha_0, \beta_0) = \sum_{i=1}^2 c_i f(x|\alpha_i, \beta_i) \Rightarrow \Phi(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \Phi_i(t)$$

که $\Phi(\omega)$ ، $\Phi_1(\omega)$ و $\Phi_2(\omega)$ به ترتیب تابع مشخصه $f(x|\alpha_0, \beta_0)$ ، $f(x|\alpha_1, \beta_1)$ و $f(x|\alpha_2, \beta_2)$ هستند. بنابراین،

$$\left(\frac{1}{1-\beta \cdot \omega}\right)^\alpha = \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{1}{1-\beta_i \cdot \omega}\right)^{\alpha_i} \quad (46)$$

با جایگذاری $\omega = 0$ در معادله (46) داریم،

$$\omega = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^2 c_i = 1 \quad (47)$$

اکنون حد معادله (46) را وقتی $\omega \rightarrow 1/\beta_i$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{\omega \rightarrow 1/\beta_j} \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot \omega} \right)^\alpha = \lim_{\omega \rightarrow 1/\beta_j} \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{1}{1 - \beta_i \cdot \omega} \right)^{\alpha_i} = \infty \Rightarrow \beta = \beta_1 = \beta_2 \quad (48)$$

فرض کنید $\alpha_1 = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ داریم،

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (1 - \beta \cdot \omega)^{\alpha_1} \frac{1}{(1 - \beta \cdot \omega)^\alpha} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{\alpha_1 - \alpha} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} (1 - \beta_i \omega)^{\alpha_1} \sum_{i=1}^2 c_i \frac{1}{(1 - \beta_i \omega)^{\alpha_i}} = c_1 + c_2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{\alpha_1 - \alpha_2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{\alpha_1 - \alpha} = c_1 + c_2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (49)$$

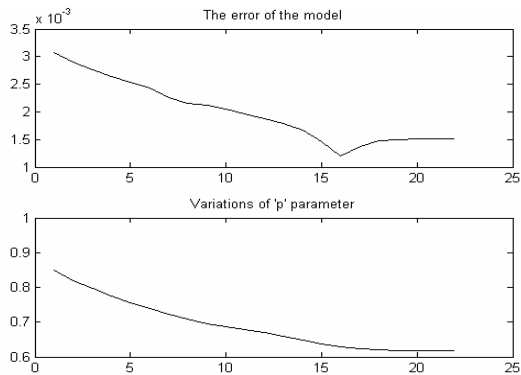
تساوی فوق به ازای تمام مقادیر c_1 و c_2 تنها زمانی برقرار است که $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. بنابراین حکم به طور کامل اثبات گردیده است.



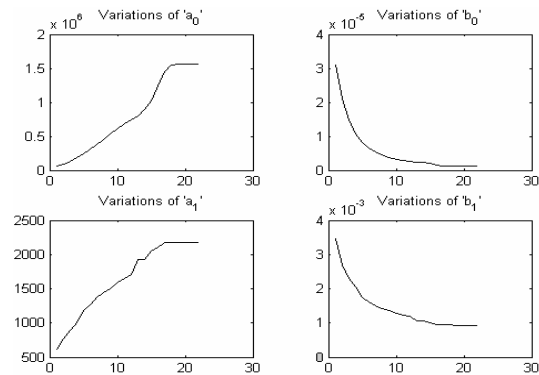
شکل ۱: تصویر مرجع.



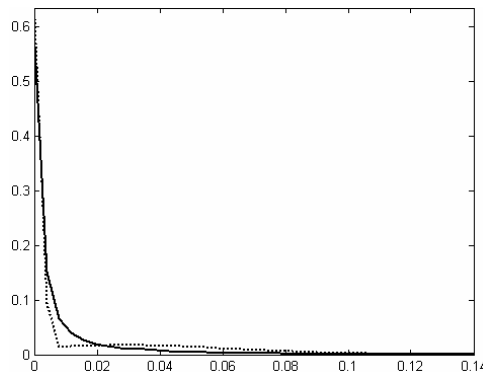
شکل ۲: لبه‌های آشکار شده در شکل ۱.



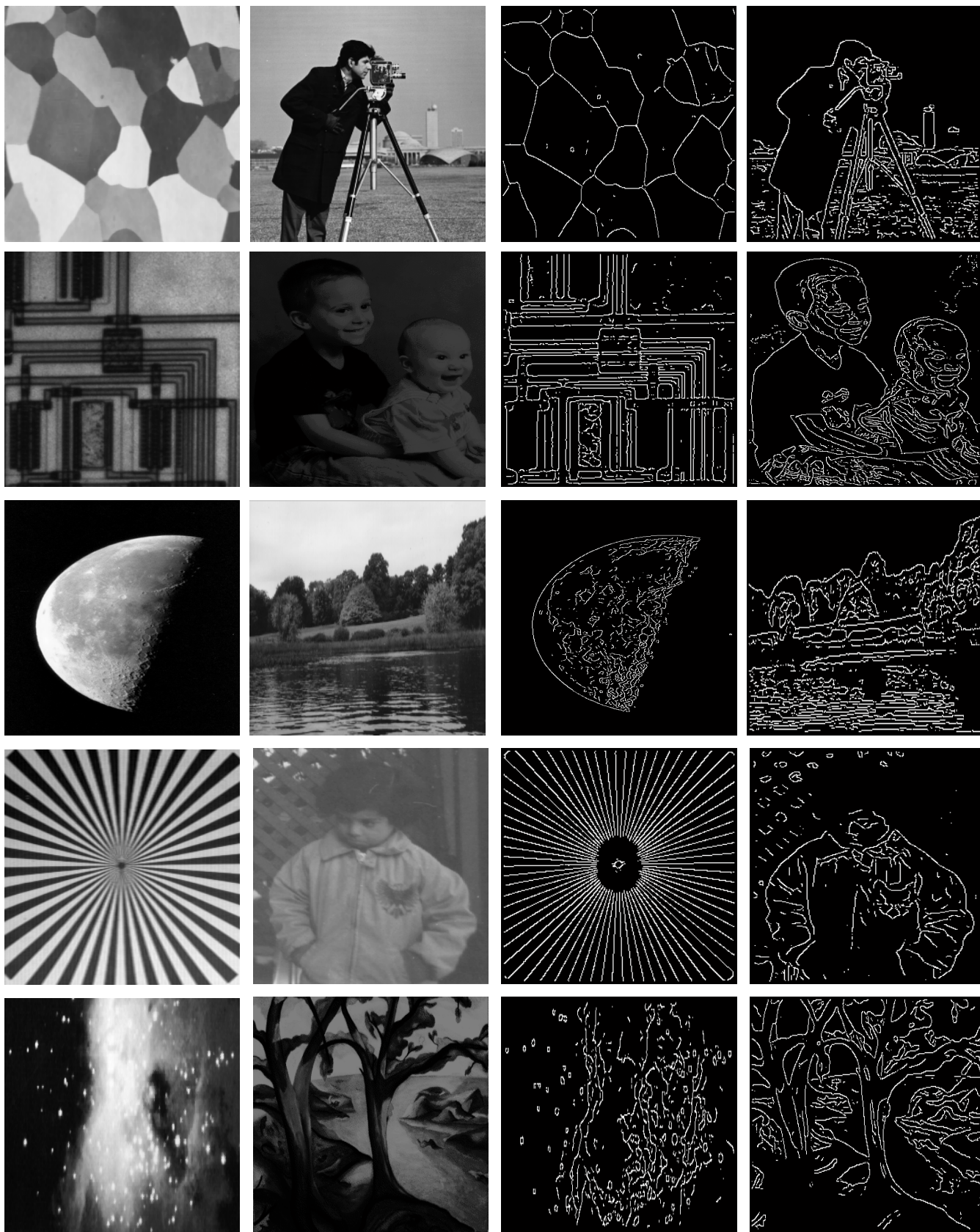
شکل ۳: (منحنی بالا) تغییرات متوسط قدر مطلق اختلاف هیستوگرام با مدل بدست آمده. (منحنی پایین) نسبت تعداد پیکسل‌های غیرلبه در شکل ۱.



شکل ۴: منحنی‌های تغییرات پارامترهای توابع چگالی احتمال گاما برای شکل ۱.



شکل ۵: هیستوگرام مجذور تصویر گرادبانی (خط توپر) و مدل بدست آمده از الگوریتم Henstock (نقطه چین).



شکل ۶: نتیجه اعمال الگوریتم Henstock بر ۱۰ تصویر استاندارد.